CB 63

¿NÚMEROS DECIMALES O EXPRESIONES DECIMALES? UNA EXPLORACIÓN CON ALUMNOS DE PROFESORADOS DE MATEMÁTICA

Edith GOROSTEGUI, Diego VILOTTA

Facultad de Ciencias Exactas, Naturales y Agrimensura - Corrientes - Argentina
laflechita@arnet.com.ar vlottadiego@arnet.com.ar

Nivel Educativo: Educación Secundaria y Superior.

Palabras Clave: Representaciones semióticas, conjuntos numéricos.

RESUMEN

El aprendizaje de los distintos conjuntos numéricos constituye un contenido importante del nivel secundario. Sin embargo, el conjunto de los números decimales no aparece en general como uno de esos conjuntos, con identidad propia, sino en relación con la expresión decimal de números pertenecientes a otros conjuntos. En una indagación realizada con alumnos de los últimos años de profesorados de Matemática en relación con la tarea de determinar si un número pertenece o no a un cierto conjunto y en la que estuvo implicada una coordinación entre las relaciones de inclusión de los conjuntos y la representación semiótica de los números, pudimos constatar la persistente dificultad de tales alumnos para caracterizar a los números decimales independientemente de las expresiones decimales de los números.

INTRODUCCIÓN

Esta ponencia forma parte del desarrollo del proyecto: *"¿Qué matemática vive hoy en las aulas de EGB3? Una aproximación a la complejidad del aula"* ANPCyT N°36504 que se inició en el año 2008 y que tiene entre sus objetivos indagar sobre los conocimientos que sobre los conjuntos numéricos, han ido elaborando los futuros profesores de matemática a lo largo de su escolaridad obligatoria y en la formación inicial como futuros profesores. En particular, se quiere indagar sobre las prácticas matemáticas que ponen en juego frente a la tarea de decidir si un número pertenece o no a un determinado conjunto y sobre el papel que juega en esa determinación la representación semiótica elegida para presentar dicho número.

El marco teórico de la investigación es la Didáctica Fundamental, en particular la TSD (Teoría de las Situaciones Didácticas) y la TAD (Teoría Antropológica de lo Didáctico), teorías que modelizan al conocimiento matemático como puerta de entrada a la comprensión de los fenómenos de producción, enseñanza y aprendizaje de la Matemática.

Una de las primeras tareas de este proyecto fue elaborar y realizar un **diagnóstico** sobre conocimientos relacionados con sistemas numéricos a alumnos del último año de cinco (5) Profesorados de Matemática – terciarios y universitarios - pertenecientes a tres (3) provincias de nuestro país. El total de la muestra fue de 71 alumnos.

En esta oportunidad nos referiremos a las conceptualizaciones sobre los números decimales que hemos identificado en las respuestas dadas por los alumnos de la muestra en el diagnóstico citado.

Para medir la importancia del conjunto de **números decimales,** entendido como el conjunto de números que admiten una expresión decimal finita, podemos citar las prácticas sociales de referencia: situaciones de medición que forman una gran parte de las actividades humanas, uso de instrumentos tecnológicos de cálculo y, situaciones de aproximación de números racionales y reales. Y en relación con la enseñanza, los decimales aparecen en los primeros años de la escolaridad primaria.

Por otra parte, si nos ocupamos de las representaciones de los números, podemos afirmar que todo número real posee una **expresión decimal**, ya sea finita o infinita (y en este caso, periódica o no), si bien no se puede asegurar su unicidad.

En particular, los números decimales por ser números reales también poseen una expresión decimal. En este caso se trata de expresiones decimales con un número finito de cifras decimales o infinitas cifras periódicas de período 0 o 9, tales como: 3,456; 2,39999…; 4,00000… También, pueden representarse como fracciones decimales, es decir como fracciones de la forma: $a/10^p$, siendo “a” entero y “p” entero no negativo.

En el trabajo matemático, es sin duda necesario distinguir bien cuándo hablamos de número y cuándo, nos referimos a una de sus formas de representarlo, aunque, como todos los objetos matemáticos, sólo es posible el acceso a una conceptualización - de los números en nuestro caso - a través de su representación: “…*los objetos matemáticos sólo existen a través de las herramientas que se inventan para expresarlos y… las posibilidades de producción de conocimiento están condicionadas por la disponibilidad de dichas herramientas*”(Sadovsky; Pág. 32).

Los alumnos de distintos niveles educativos, tienen en general una concepción de los números decimales como números con coma. Podemos asumir que esta dificultad se originaría en que, en la enseñanza, una primera aproximación a las características de estos números, aparece ligada muy fuertemente a su representación “con coma”, en oposición a los números naturales “sin coma”, sin que esto sea cuestionado en estudios posteriores de los alumnos. No parece tener cabida en la enseñanza la reflexión y profundización progresiva de este conocimiento.

Los alumnos deberían poder aprender más adelante que los números decimales también tienen una representación fraccionaria, y que, si bien otra de sus formas de representación incluye la coma, ni todos los números con coma son decimales ni todos los que no la tienen no son decimales. Por ejemplo, el número 2,345555555…. tiene coma en su representación pero se trata de un número racional no decimal; el número 7 es un número decimal aunque no tenga coma en su representación. Podríamos considerar también un número como el siguiente 4,59999… que en principio sería caracterizado como periódico[1] y sin embargo es una escritura equivalente del número decimal 4,6 o sea es un número decimal.

Los números irracionales también “*aportan”* a la confusión dado que una de sus formas de representación incluye una expresión con coma y un desarrollo decimal, pero *“…la diferencia fundamental entre racionales e irracionales reside en la forma del desarrollo decimal. Para*

[1] En relación con los números periódicos es necesario precisar que si bien puede identificarse a Q como el conjunto de los números periódicos, en este caso nos referimos como periódicos a aquéllos números cuyo período es distinto de 0 y de 9. Los números racionales con un período 0 o 9 son los números decimales.

los racionales es finito o periódico. Para los irracionales no es ninguno de estos casos…" (Gentile, E (1976): Notas de Algebra I; Pág. 234)

En el lenguaje matemático habitual existe una serie de palabras que incluyen el término "decimal" que no relacionan necesariamente con número decimal. Nos referimos por ejemplo a: "sistema de numeración decimal", "expresión decimal", "notación decimal", "desarrollo decimal", "cifras decimales", "decimales", "infinitas cifras decimales", "cantidad finita de cifras decimales"; "números decimales", "número racional decimal"; etc.

En términos de enseñanza y más precisamente de significados personales que los alumnos pudieran construir alrededor de expresiones como las citadas, es preciso distinguirlas y que los alumnos construyan el significado institucional de cada una de ellas, aunque será necesario, en ocasiones, permitir cierta ambigüedad en el discurso. Tal como expresa Centeno: "…*La expresión **número decimal** es ambigua porque la palabra número exige un adjetivo que se refiere a su naturaleza intrínseca. Por ejemplo, los adjetivos natural, racional, real, nos permiten identificar la naturaleza de los números de que hablamos. Naturaleza que es independiente de la forma de representar estos números y en particular del sistema de numeración elegido. En cambio, la palabra decimal, que procede de "diez", hace referencia a la base de numeración más extendida, llamada numeración decimal. (...) "En la práctica se comete abuso de lenguaje cuando se identifica "escritura con coma" y "número decimal". Pero los abusos de lenguaje son indispensables en el curso escolar – y hasta en todo discurso matemático-, porque hablar y escribir con la máxima precisión alargaría indefinidamente las frases. Es importante, sin embargo, que los abusos de lenguaje sean conscientes y conocidos por profesores y alumnos, de forma que no exista ambigüedad ni confusión en el lenguaje*".

ACERCA DE LOS CONOCIMIENTOS DE LOS ALUMNOS SOBRE LOS NÚMEROS DECIMALES

En el diagnóstico aplicado a los alumnos en el último año de su carrera, la tarea consistió en responder Sí o No y justificar, si ciertos números pertenecen o no a los conjuntos: D, Q, I, Q-D y R; se solicitaba además la definición de Q y de otros dos conjuntos no presentes habitualmente en la escolaridad como D, conjunto de números decimales y R-D, conjunto de idecimales, según la terminología de Bronner (1998).

Se presentó a los alumnos una tabla de doble entrada con los siguientes números: $(\sqrt{2})^2$; 1,3555…; $1+\sqrt{2}$; $\frac{2{,}3}{4{,}5}$; $\frac{\sqrt{2}}{5}$; $\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{45}}$; $\frac{6}{15}$; $\frac{7}{6}$; 0,121122111222… y los conjuntos ya citados.

Para identificar las conceptualizaciones de los alumnos sobre los números decimales, analizamos y categorizamos sus respuestas en las columnas D y Q-D. Para cada una de estas categorías elaboramos la definición emergente y la contrastamos con la definición aportada por un mismo alumno. Queremos enfatizar que las definiciones que presentaremos no fueron elaboradas por los alumnos en forma explícita ni siempre habiendo tomado conciencia de dicha caracterización, es más, algunos expresaron que estaban finalmente identificando por ejemplo D con R y al decir: "Ahora me doy cuenta que estoy diciendo que los decimales son los reales…"

Las seis definiciones identificadas son las que se enlistan a continuación a las que se agrega una categoría de "otros".

1- Los números decimales coinciden con los números reales, considerando que todo número real puede ser expresado en forma decimal, es decir, se identifica a número decimal con poseer una expresión decimal. La respuesta en la columna correspondiente al conjunto D es Sí en todos los casos.
2- Los números decimales son los números racionales, ya que son estos números los que tienen una expresión decimal. Es decir, se indica que cualquier número racional escrito en forma decimal o fraccionaria pertenece a D.
3- Los números decimales son definidos como aquéllos que en su expresión decimal tienen un número finito de cifras decimales.

Para cada una de esas tres categorías, elaboramos otras tres correspondientes a cada una de las anteriores, para el caso en que se excluyan del conjunto D a los números enteros. Es decir se consideran como decimales únicamente aquéllos números pertenecientes a cada uno de los conjuntos citados, que pueden escribirse efectivamente con coma y cuyas cifras decimales son distintas de cero.

4- Los números decimales se identifican con los números reales, siempre que no se trate de números enteros.
5- Los números decimales coinciden con los números racionales de los cuales se excluyen los enteros.
6- Los números decimales son identificados como los que se escriben con un número finito de cifras decimales pero se excluyen de este conjunto, a los números cuyas cifras decimales sean ceros, es decir a los números enteros.
7- Otros.

CONCLUSIONES

De la información obtenida en el diagnóstico, queda claro que un alto porcentaje de los alumnos, casi profesores de matemática, no han logrado construir una conceptualización correcta de los números decimales. En términos de porcentajes observamos que el 41% tiene serios problemas para caracterizar números decimales independientemente de su expresión decimal ya que consideran que todos los números que tienen una expresión decimal son números decimales, si bien casi la mitad de ellos no incluyen a Z en ese conjunto.

Si nos referimos a las 6 categorías identificadas podemos decir que sólo el 28% identifica correctamente los números que pertenecen al conjunto de números decimales; 13% considera que los números decimales son las expresiones decimales de los números racionales. Un grupo menor de alumnos, 6% identifica a los decimales con los enteros a partir de considerar que decimal alude al sistema de numeración en el que se representan los números enteros, dejando de lado que el resto de números también pueden ser expresados en base 10.

Una conclusión importante de este diagnóstico se relaciona con el no-reconocimiento de que los números enteros son a la vez números decimales, independientemente de la definición del conjunto D. Un 40% de los alumnos afirma que los números enteros no son decimales porque no se escriben con coma. Para ellos número decimal se sigue definiendo en oposición a número entero.

El análisis de las respuestas de los alumnos en la columna Q-D nos permitió corroborar la interpretación realizada en muchos casos, ya que los alumnos que identifican a D con R o con Q con exclusión de los enteros, afirman Sí en Q-D para los enteros y No para el resto de los números.

En general las dificultades de los alumnos podrían ser interpretadas como la incapacidad de coordinar la información que seguramente poseen sobre las relaciones de inclusión entre los conjuntos involucrados, en particular Z, con la discusión de si un número pertenece o no a un cierto conjunto.

Los resultados de este diagnóstico muestran también que la enseñanza posterior no ha logrado hacer evolucionar la primitiva idea (escolar) de que los números decimales aparecen para resolver ciertos problemas que los números naturales no lo permiten.

Es a lo largo de la escolaridad posterior, donde se deberían retomar los conocimientos adquiridos sobre los conjuntos numéricos, para ampliarlos, establecer las relaciones de inclusión con otros sistemas numéricos, identificar sus propiedades así como las de las operaciones definidas en ellos, reflexionar sobre las nuevas representaciones de los números que aporta cada conjunto, etc. En lugar de hacer esto con frecuencia, se hace una presentación de los sistemas numéricos en forma abstracta donde casi no se trabaja con las expresiones decimales de los números en cada uno de los conjuntos y sólo se relaciona - cuando ya se han construido todos los conjuntos numéricos incluidos en los reales - los desarrollos decimales con los números reales.

Finalmente es importante mencionar que la elaboración de estos conceptos llevó un largo período de tiempo que se mide en siglos y que muchas de las cuestiones planteadas desde siglos anteriores, quedaron en realidad clarificadas y totalmente formalizadas recién en el siglo XIX con la construcción de los números reales realizada por Cantor, Dedekind y Hilbert.

BIBLIOGRAFÍA

Bronner, A. (1998): Les rapports d´enseignants de Troisiéme et de seconde aux objets “nombre réel” et “racine carrée”. RDM 17 (3) La pensé sauvage. Grenoble. Francia

Centeno, Julia (1988): Números decimales. ¿Por qué? ¿Para qué? Editorial Síntesis.

Cirade, Giselle (2006): Tesis de doctorado en Didáctica de la Matemática: “*Convertirse en profesor de matemática: entre problemas de la profesión y formación en el IUFM (Instituto Universitario de Formación de profesores)*” Director: Yves Chevallard. Francia

Gentile, E. (1976): Notas de Algebra I. Editorial Eudeba. Bs As.

Sadovsky, P. (2005): Enseñar Matemática hoy. Miradas, sentidos y desafíos. Editorial Libros del Zorzal. Bs As.